Zoe's Design

Tony Forbes
The Open University

Peter Cameron's 60th birthday conference, Ambleside, August 2007

A *Steiner system* $S(2,k,v)$ is a block design consisting of a set V of v points and a set $\mathcal{B}$ of $\binom{v}{2}/\binom{k}{2}$ blocks, k-element sets of points, such that each pair of points is contained in precisely one block. In the important special case $k=3$ the design is called a *Steiner triple system of order* v and denoted by STS(v).

Here we consider the construction of Steiner $S(2,4,v)$ systems by 'stitching together' Steiner triple systems of orders γ_i, $i=1,2,\ldots,\chi$. The blocks of the constituent STS(γ_i)s are augmented from three points to four by adding a point from one of the other STS(γ_j)s. Equivalently, we take an $S(2,4,v)$ system and colour the points with χ colours according to the rule that every block must contain three points of one colour and one point of a different colour. For all this to work, a number of things must be right [3, 2].

(i) The points must add up: $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\chi=v$, and obviously the γ_i must be valid orders of Steiner triple systems: $\gamma_i\equiv 1$ or $3 \pmod 6$.

(ii) The blocks must add up. Indeed, by counting pairs that occur in Steiner triple systems and pairs that don't, we have $\sum_{i=1}^{\chi}\binom{\gamma_i}{2}=\sum_{1\le i<j\le\chi}\gamma_i\gamma_j=\frac{1}{4}v(v-1)$.

(iii) The γ_i cannot be too large: $\gamma_i\le\frac{1}{3}(2v+1)$.

(iv) The differences $|\gamma_i-\gamma_j|$ cannot be too small: $(\gamma_i-\gamma_j)^2\ge\gamma_i+\gamma_j$.

Apart from an infinite sequence where the systems are known to exist ($v=\frac{1}{2}(3^\chi-1)$, $\chi=1,2,\ldots$), the sets of parameters with $v\le 361$ which satisfy conditions (i)–(iv) are given in the table below. The possible existence of the corresponding $S(2,4,v)$ designs has been an open problem for many years. When $\chi=2$ condition (iv) becomes an equality, $(\gamma_1-\gamma_2)^2=\gamma_1+\gamma_2$, and $v=(12s+t)^2$, $s=0,1,2,\ldots$, $t=2$ or 10. The one with $s=0$, $t=10$ involves a hundred points and has become known as *The Design of the Century*.

v	χ	$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_\chi$	v	χ	$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_\chi$	v	χ	$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_\chi$
61	3	3, 19, 39	232	4	3, 9, 73, 147	313	5	1, 3, 9, 105, 195
100	2	45, 55	232	4	3, 19, 57, 153	328	4	1, 3, 135, 189
109	3	1, 45, 63	301	3	1, 135, 165	328	4	1, 45, 63, 219
184	4	1, 9, 57, 117	301	3	9, 109, 183	328	4	9, 15, 91, 213
184	4	3, 19, 39, 123	301	3	33, 69, 199	361	5	1, 9, 21, 93, 237
196	2	91, 105	301	3	45, 55, 201	361	5	3, 9, 15, 99, 235

I present constructions for the first three entries in the table. Believing that the design for $v=61$ and $\chi=3$, the first to be built, might have some historical interest I recorded the precise date when my computer achieved a successful construction: 25 March 2005. That date was also by coincidence the 21st birthday of Zoe, my youngest daughter; so I always refer to this particular Steiner $S(2,4,61)$ system as *Zoe's design* [1, Chapter 11]. It was printed on the cover of *M500* **209**.

Zoe's design $S(2,4,61)$ $(|A| = 39,\ |B| = 19,\ |C| = 3)$

A1	A14	A27	B0	A2	A15	A28	B0	A3	A16	A29	B0	A4	A17	A30	B0
A7	A20	A33	B0	A8	A21	A34	B0	A9	A22	A35	B0	A11	A24	A37	B0
A0	A2	A14	B10	A13	A15	A27	B13	A26	A28	A1	B15	A0	A3	A10	B8
A0	A4	A7	B6	A13	A17	A20	B4	A26	A30	A33	B9	A0	A5	A27	B16
A0	A6	A9	B7	A13	A19	A22	B11	A26	A32	A35	B1	A0	A8	A11	B15
A0	A12	A21	B12	A13	A25	A34	B8	A26	A38	A8	B18	A0	A13	A37	B2
A0	A15	A30	B18	A13	A28	A4	B12	A26	A2	A17	B8	A0	A18	A28	B5
A0	A19	A20	B17	A13	A32	A33	B5	A26	A6	A7	B16	A0	A22	A34	B9
A0	A29	A38	B13	A13	A3	A12	B15	A26	A16	A25	B10	A0	A31	A35	B11
A0	A33	A36	B14	A13	A7	A10	B3	A26	A20	A23	B2	A1	A3	A15	B12
A1	A4	A21	B9	A14	A17	A34	B6	A27	A30	A8	B4	A1	A5	A32	B3
A1	A6	A11	B8	A14	A19	A24	B18	A27	A32	A37	B12	A1	A7	A22	B18
A1	A8	A20	B11	A14	A21	A33	B1	A27	A34	A7	B7	A1	A9	A23	B16
A1	A10	A31	B13	A14	A23	A5	B15	A27	A36	A18	B10	A1	A12	A34	B14
A1	A16	A35	B7	A14	A29	A9	B11	A27	A3	A22	B1	A1	A19	A37	B4
A1	A29	A33	B10	A14	A3	A7	B13	A27	A16	A20	B15	A1	A30	A38	B6
A2	A3	A20	B14	A15	A16	A33	B3	A28	A29	A7	B2	A2	A4	A11	B13
A2	A5	A37	B7	A15	A18	A11	B11	A28	A31	A24	B1	A2	A6	A38	B5
A2	A7	A9	B17	A15	A20	A22	B5	A28	A33	A35	B16	A2	A8	A19	B12
A2	A10	A23	B9	A15	A23	A36	B6	A28	A36	A10	B4	A2	A12	A36	B1
A2	A24	A32	B11	A15	A37	A6	B1	A28	A11	A19	B7	A2	A30	A35	B15
A2	A33	A34	B4	A15	A7	A8	B9	A28	A20	A21	B6	A3	A4	A32	B18
A3	A6	A35	B4	A16	A19	A9	B9	A29	A32	A22	B6	A3	A8	A36	B7
A3	A9	A24	B2	A16	A22	A37	B14	A29	A35	A11	B3	A3	A11	A31	B10
A3	A17	A18	B16	A16	A30	A31	B17	A29	A4	A5	B5	A3	A23	A30	B3
A3	A25	A33	B11	A16	A38	A7	B1	A29	A12	A20	B7	A3	A34	A38	B17
A4	A6	A10	B17	A17	A19	A23	B5	A30	A32	A36	B16	A4	A8	A22	B16
A4	A19	A25	B1	A17	A32	A38	B7	A30	A6	A12	B11	A4	A23	A35	B14
A4	A31	A34	B15	A17	A5	A8	B10	A30	A18	A21	B13	A4	A37	A38	B3
A5	A6	A21	B14	A18	A19	A34	B3	A31	A32	A8	B2	A5	A10	A20	B18
A5	A11	A22	B4	A18	A24	A35	B9	A31	A37	A9	B6	A5	A12	A25	B6
A5	A19	A33	B2	A18	A32	A7	B14	A31	A6	A20	B3	A5	A34	A36	B11
A6	A25	A36	B15	A19	A38	A10	B10	A32	A12	A23	B13	A7	A11	A25	B5
A7	A12	A35	B10	A20	A25	A9	B13	A33	A38	A22	B15	A7	A23	A24	B4
A8	A23	A37	B8	A21	A36	A11	B18	A34	A10	A24	B12	A9	A11	A38	B12
A26	A27	A4	C0	A11	A20	A30	C0	A1	A2	A25	C0	A15	A34	A35	C0
A17	A31	A33	C0	A18	A9	A12	C0	A10	A14	A37	C0	A24	A29	A8	C0
A13	A36	A38	C0												
A0	A1	A17	C1	A24	A33	A4	C1	A14	A15	A38	C1	A28	A8	A9	C1
A30	A5	A7	C1	A31	A22	A25	C1	A23	A27	A11	C1	A37	A3	A21	C1
A10	A12	A26	C1												
A13	A14	A30	C2	A37	A7	A17	C2	A27	A28	A12	C2	A2	A21	A22	C2
A4	A18	A20	C2	A5	A35	A38	C2	A36	A1	A24	C2	A11	A16	A34	C2
A0	A23	A25	C2												
B0	B1	B4	A0	B0	B7	B9	A13	B0	B11	B6	A26	B1	B2	B5	A1
B2	B3	B6	A2	B2	B13	B8	A35	B3	B10	B12	A22	B3	B14	B9	A28
B5	B16	B11	A37	B6	B13	B15	A19	B7	B8	B11	A4	B7	B14	B16	A14
B8	B0	B14	A38	B9	B10	B13	A6	B10	B17	B0	A23	B10	B2	B16	A34
B11	B3	B17	A27	B12	B0	B2	A25	B12	B4	B18	A31	B13	B14	B17	A8
B14	B2	B4	A15	B15	B16	B0	A10	B15	B3	B5	A21	B16	B17	B1	A11
B17	B9	B4	A29	B18	B0	B3	A12	B18	B6	B8	A18				
B2	B9	B11	C0	B3	B4	B7	C0	B8	B15	B17	C0	B12	B13	B16	C0
B4	B5	B8	C1	B6	B17	B12	C1	B9	B16	B18	C1	B10	B11	B14	C1
B4	B11	B13	C2	B5	B12	B14	C2	B6	B7	B10	C2	B9	B1	B15	C2

A5	A18	A31	B0	A6	A19	A32	B0								
A13	A16	A23	B18	A26	A29	A36	B12								
A13	A18	A1	B17	A26	A31	A14	B5								
A13	A21	A24	B10	A26	A34	A37	B13								
A13	A26	A11	B14	A26	A0	A24	B3								
A13	A31	A2	B16	A26	A5	A15	B17								
A13	A35	A8	B6	A26	A9	A21	B4								
A13	A5	A9	B1	A26	A18	A22	B7								
A14	A16	A28	B8	A27	A29	A2	B18								
A14	A18	A6	B2	A27	A31	A19	B14								
A14	A20	A35	B12	A27	A33	A9	B8								
A14	A22	A36	B17	A27	A35	A10	B5								
A14	A25	A8	B3	A27	A38	A21	B2								
A14	A32	A11	B9	A27	A6	A24	B6								
A14	A4	A12	B4	A27	A17	A25	B9								
A15	A17	A24	B15	A28	A30	A37	B10								
A15	A19	A12	B16	A28	A32	A25	B17								
A15	A21	A32	B8	A28	A34	A6	B18								
A15	A25	A10	B7	A28	A38	A23	B11								
A15	A4	A9	B10	A28	A17	A22	B13								
A16	A17	A6	B12	A29	A30	A19	B8								
A16	A21	A10	B11	A29	A34	A23	B1								
A16	A24	A5	B13	A29	A37	A18	B15								
A16	A36	A4	B2	A29	A10	A17	B14								
A16	A8	A12	B5	A29	A21	A25	B16								
A17	A21	A35	B17	A30	A34	A9	B5								
A17	A36	A9	B3	A30	A10	A22	B2								
A17	A11	A12	B2	A30	A24	A25	B14								
A18	A23	A33	B12	A31	A36	A7	B8								
A18	A25	A38	B4	A31	A38	A12	B9								
A18	A8	A10	B1	A31	A21	A23	B7								
A20	A24	A38	B16	A33	A37	A12	B17								
A20	A36	A37	B9	A33	A10	A11	B6								
A22	A24	A12	B8	A35	A37	A25	B18								
A0	A16	A32	C0	A28	A3	A5	C0								
A19	A21	A7	C0	A6	A22	A23	C0								
A13	A29	A6	C1	A2	A16	A18	C1								
A32	A34	A20	C1	A19	A35	A36	C1								
A26	A3	A19	C2	A15	A29	A31	C2								
A6	A8	A33	C2	A32	A9	A10	C2								
				C0	C1	C2	B0								
B1	B8	B10	A20	B1	B12	B7	A30								
B4	B15	B10	A32	B5	B6	B9	A3								
B7	B18	B13	A33	B8	B9	B12	A5								
B11	B12	B15	A7	B11	B18	B1	A17								
B13	B5	B0	A36	B14	B15	B18	A9								
B16	B4	B6	A16	B17	B5	B7	A24								
B14	B6	B1	C0	B18	B10	B5	C0								
B13	B1	B3	C1	B15	B7	B2	C1								
B16	B8	B3	C2	B17	B18	B2	C2								

$S(2,4,100)$ (45, 55)

A system: STS(55) blocks: $495 = 45 \cdot 11$
B system: STS(45) blocks: $330 = 30 \cdot 11$

$S(2,4,100)$: blocks: $825 = 75 \cdot 11$

$$\sigma : \begin{cases} A_i \mapsto A_{i+5 \bmod 55}, \\ B_j \mapsto B_{j+4 \bmod 44}, \\ \infty \mapsto \infty \end{cases}$$

B0	B1	B9	A0	B4	B6	B23	A0	B8	B11	B13	A0
B12	B20	B10	A0	B36	B5	B7	A0	B2	B3	B38	A0
B0	B4	B33	A1	B40	B3	B6	A1	B8	B24	B5	A1
B16	B7	B11	A1	B1	B2	B21	A1	B9	B13	B42	A1
B0	B6	B24	A2	B8	B19	B40	A2	B4	B31	B3	A2
B9	B14	B43	A2	B1	B7	B29	A2	B5	B26	B2	A2
B0	B14	B21	A3	B4	B35	B41	A3	B1	B10	B31	A3
B5	B23	∞	A3	B2	B7	B18	A3	B22	B34	B3	A3
B28	B1	B14	A4	B4	B22	B26	A4	B0	B38	∞	A4
B29	B39	B2	A4	B37	B5	B19	A4	B3	B11	B35	A4
A25	A29	A19	B0	A20	A32	A5	B0	A35	A48	A18	B0
A15	A39	A11	B0	A41	A43	A8	B0	A21	A42	A13	B0
A31	A14	A28	B0	A16	A9	A12	B0	A17	A23	A49	B0
A37	A44	A33	B0	A22	A34	A38	B0				
A35	A36	A13	B1	A10	A17	A18	B1	A25	A44	A11	B1
A20	A43	A19	B1	A5	A37	A39	B1	A15	A6	A12	B1
A30	A23	A28	B1	A26	A29	A34	B1	A21	A38	A48	B1
A27	A42	A9	B1	A32	A49	A7	B1				
A5	A7	A21	B2	A20	A25	A46	B2	A35	A41	A11	B2
A40	A54	A15	B2	A30	A47	A19	B2	A36	A37	A23	B2
A26	A39	A24	B2	A16	A32	A53	B2	A31	A12	A22	B2
A17	A8	A9	B2	A13	A28	A49	B2				
A40	A43	A32	B3	A35	A44	A15	B3	A10	A20	A38	B3
A5	A27	A47	B3	A25	A6	A13	B3	A21	A26	A36	B3
A31	A42	A11	B3	A16	A28	A34	B3	A41	A9	A29	B3
A12	A17	A48	B3	A8	A24	A54	B3	A0	A11	A37	∞

The table shows 75 orbit representatives under the action of σ. Because this number is relatively small it is quite feasible, if a little tedious, to check by hand that the design really is an $S(2,4,100)$ with the desired property. The symbol ∞ denotes the 45th B point.

This is *The Design of the Century.* It took a long time to find—about 45 weeks—but I was almost certain I would succeed. After a couple of weeks I noticed that every one to three days the computer was producing a 'near miss', where 74 of the orbits are correctly assigned but the last three A points to be paired with B_3 do not form a block. With a bit of arm-waving one can reasonably expect a 'hit' for every 120 near misses, and within a factor of two is what actually happened.

The design appeared (without explanation) as the front cover picture of *M500* **205**.

$$S(2,4,109) \qquad (1,\ 45,\ 63)$$

A system:	STS(63)	blocks:	$651 = 30 \cdot 21 + 21$
B system:	STS(45)	blocks:	$330 = 15 \cdot 21 + 15$
C system:	STS(1)	blocks:	0
$S(2,4,109)$:		blocks:	$981 = 45 \cdot 21 + 36$

$$\tau : \begin{cases} A_i \mapsto A_{i+3 \bmod 63}, \ i = 0, 1, \ldots, 62, \\ B_j \mapsto B_{j+2 \bmod 42}, \ j = 0, 1, \ldots, 41, \\ B_{42} \mapsto B_{43} \mapsto B_{44} \mapsto B_{42}, \\ C_0 \mapsto C_0. \end{cases}$$

B0	B1	B44	A0	B2	B4	B41	A0	B8	B14	B27	A0
B6	B13	B5	A0	B28	B3	B7	A0				
B0	B3	B5	A1	B2	B6	B35	A1	B4	B12	B28	A1
B8	B18	B38	A1	B1	B7	B33	A1				
B0	B9	B27	A2	B2	B13	B25	A2	B8	B23	B1	A2
B4	B29	B42	A2	B14	B3	B43	A2				
A9	A11	A28	B0	A30	A35	A50	B0	A15	A25	A47	B0
A3	**A18**	**A36**	B0	A27	A43	A10	B0	A12	A29	A40	B0
A6	A32	A5	B0	A48	A14	A16	B0	A33	A4	A20	B0
A39	A19	A34	B0	A45	A26	A38	B0	A24	A8	A13	B0
A49	A56	A23	B0	A31	A41	A17	B0				
A33	**A36**	**A42**	B1	A18	A25	A31	B1	A9	A17	A20	B1
A39	**A51**	**A12**	B1	A27	A41	A50	B1	A30	A52	A7	B1
A21	A46	A19	B1	A6	A43	A44	B1	A15	A56	A11	B1
A48	A34	A38	B1	A40	A49	A5	B1	A10	A22	A35	B1
A4	A28	A59	B1	A37	A8	A14	B1				
A0	A1	A4	B42	A6	A41	A61	B42				
B0	B14	B28	C0	B1	B15	B29	C0	B42	B43	B44	C0
A0	**A21**	**A42**	C0	A1	A22	A43	C0	A2	A23	A44	C0

Under the action of τ, block $\{B_{42}, B_{43}, B_{44}, C_0\}$ is fixed, there are five orbits of size 7 (the other blocks containing C_0) and 45 orbits of size 21. Note that the block set of the STS(1) is empty. The highlighted blocks form a cyclic STS(21).

References

[1] A. D. Forbes, *Configurations and colouring problems in block designs*, Ph.D. thesis, The Open University, 2006.

[2] A. D. Forbes, M. J. Grannell and T. S. Griggs, New type B colorable $S(2,4,v)$ designs, *J. Combin. Designs*, **15** (2007), 357–368.

[3] S. Milici, A. Rosa and V. Voloshin, Colouring Steiner systems with specified block colour patterns, *Discrete Math.* **240** (2001), 145–160.